В своем трактате „О спиралях" Архимед применяет этот результат для вычисления площади сектора архимедовой спирали $r = a \cdot \vartheta$; так как площадь такого сектора равна:

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2 d\vartheta = \frac{1}{2a}\int_{r_2}^{r_1} r^2 dr,$$

то ее можно найти с помощью второго из вышенаписанных интегралов. Архимед вычисляет следующим образом отношение этой площади к площади кругового сектора с радиусом r: одновременно с секторами он делит угол $\theta_1 - \theta_0$, затем строит два ряда круговых секторов, заключенных в секторы спирали или заключающих их, потом сравнивает их с этими круговыми секторами, пользуясь доказательством путем исчерпывания.

Коноидами Архимед называет либо параболоиды вращения, либо двуполостные гиперболоиды вращения, причем в случае последних рассматривается только одна из двух полостей; *сфероиды* — это эллипсоиды вращения. В трактате об этих поверхностях Архимед вычисляет объем их сегментов, ограниченных какой-нибудь плоскостью; он знает, что представляет собой произвольное плоское сечение поверхности этого рода, а также способ найти его оси с помощью отрезков, образуемых секущей плоскостью на сопряженном диаметре поверхности. Он находит, далее, площадь эллипса, что, правда, нетрудно получить, если сравнить фигуры, вписанные в эллипс и в окружность, построенную на одной из осей эллипса, как на диаметре.

Вычисление объемов сводится к интегрированиям, известным Архимеду в другом виде.

Обе рассмотренные нами работы Архимеда представляют огромный интерес не только с точки зрения содержащихся в них вычислений площадей и объемов; из нашего изложения нетрудно видеть, что трактат „О коноидах и сфероидах" знакомит нас со сведениями Архимеда в области учения о конических сечениях; точно так же в трактате „О спиралях" встречаются некоторые из упоминавшихся выше *вставок* (intercalations).

Наряду с вычислением площадей, главной целью этого трактата является еще другой вопрос из области бесконечно-малого, именно нахождение касательных к спиралям. Для этого Архимед рассматривает (пользуясь, разумеется, обязательно доказательством путем исчерпывания) тот самый бесконечно-малый треугольник, который употребляют и теперь для нахождения касательных к кривым, выраженным в полярных координатах. В итоге он получает, что полярная подкасательная равна $r \cdot \vartheta$. Подкасательные в концах различных целых завитков спирали представляли для него, как мы уже указывали на стр. 63, особенный интерес потому, что они давали ему прямолинейные отрезки, равные окружностям.

Но, разумеется, самым крупным достижением Архимеда в области интегрирований является вычисление (в труде „О шаре